OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a VI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE
Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor ***

Se consideră mulțimile A= $\{x \mid x=\overline{abab},\ x \vdots 15\}$ și B= $\{x \mid x=\overline{mnmn},\ x \vdots 6\}$.

a) Determinați elementele mulțimii A;
b) Calculați $A \cap B$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $15 \mid \overline{abab} \Leftrightarrow 3 \mid \overline{abab}$ și $5 \mid \overline{abab}$.	1p
$5 \mid \overline{abab} \Rightarrow b \in \{0;5\}$ și $3 \mid \overline{abab} \Rightarrow 3 \mid 2a+2b$	1p
Pentru b=0 $\Rightarrow a \in \{3;6;9\}$ iar pentru b=5 $\Rightarrow a \in \{1;4;7\}$ $\Rightarrow$ A={3030; 6060; 9090; 1515;4545;7575}	2p
b) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x=\overline{abab}$ și $x \vdots [15;6]$	1p
$\Rightarrow x \vdots 30 \Rightarrow x \vdots 10$ si $x \vdots 3$	1p
$\Rightarrow x \in \{3030;6060;9090\}$	1p

Enunţ subiect 2, autor***

a) Aflați numerele naturale a, b, n știind că $\frac{a}{n}=\frac{b}{n+1}=p$ cu $p \in \mathbb{N}$ și a+b = 2020.

b) Arătați că dacă numerele a, b, c sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, atunci $\overline{abc}$ este divizibil cu 3.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) a = np și b = (n+1)p $\Rightarrow$ np + (n+1)p=2020	1p
$\Rightarrow$p(n+n+1)=2020 $\Rightarrow$p(2n+1)=2020	1p
2n+1 impar$\Rightarrow$2n+1$\in$ {5;101;505}$\Rightarrow$ n$\in$ {2;50;252} $\Rightarrow$ p$\in$ {404;20;4}	1p
(a;b) $\in$ {(808;1212); (1000;1020); (1008;1012)}	1p
b) Fie k; k+1; k+2 cele trei numere consecutive$\Rightarrow \frac{a}{k}=\frac{b}{k+1}=\frac{c}{k+2}$ $\Rightarrow \frac{a}{k}=\frac{b}{k+1}=\frac{c}{k+2}=\frac{a+b+c}{3k+3}$	1p
$\Rightarrow \frac{b}{k+1}=\frac{a+b+c}{3k+3} \Rightarrow b\cdot(3k+3)$=(k+1)(a+b+c)	1p
$\Rightarrow b\cdot 3(k+1)$=(k+1)(a+b+c) $\Rightarrow$3b=a+b+c$\Rightarrow 3 \mid a+b+c \Rightarrow 3 \mid \overline{abc}$	1p

Enunţ subiect 3, autor Traian Preda GM nr 11 / 2018

Se consideră unghiurile AOB, BOC și BOD astfel încât $\angle$AOB și $\angle$BOC sunt adiacente suplementare, iar $\angle$AOB și $\angle$BOD sunt neadiacente complementare. Dacă $\angle$COD=135^0, determinați măsura unghiului AOB.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
1. A $\in$ Int BOD; $\angle$AOD =180^0 - $\angle$DOC $\Rightarrow$ $\angle$AOD=45^0	1p
Dar $\angle$AOB + $\angle$BOD=90^0 $\Rightarrow$	1p
$\angle$AOB+45^0 + $\angle$BOA=90^0 $\Rightarrow$ 2 $\angle$AOB=45^0	1p
$\angle$AOB=44^0 60’:2 =22^0 30’	1p
2. D $\in$ Int BOA, $\angle$AOD =180^0 - $\angle$DOC $\Rightarrow$ $\angle$AOD=45^0	1p
Dar $\angle$AOB+ $\angle$BOD=90^0 si $\angle$AOB - $\angle$BOD=45^0 $\Rightarrow$ 2 $\angle$AOB=135^0 $\Rightarrow$ $\angle$AOB=67^0 30’	2p

Enunţ subiect 4, autor Bogdan Georgescu

Un număr $\overline{abc}$ se numește n-fidel dacă a+b+c = n și $\overline{abc} \vdots n$.

Arătați că mulțimea A={ $n \in$ N | există cel puțin un număr n-fidel} conține cel mult 23 de elemente.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Cum a, b, c sunt cifre și $a \neq 0$ $\Rightarrow A \subset \{1,2,3,\dots,27\} \Rightarrow \text{card}(A) \leq 27$	1p
Vom găsi 4 valori ale lui $n \in \{1,2,3,\dots,27\}$ pentru care nu există numere $n-$fidele. Dacă $\overline{abc}$ este $20-$fidel $\Rightarrow \overline{abc} \vdots 20 \Rightarrow c=0 \Rightarrow 20=a+b+0 \leq 18$ contradicție $\Rightarrow 20 \notin A$	1p
Dacă $\overline{abc}$ este $25-$fidel $\Rightarrow \overline{abc} \vdots 25 \Rightarrow$ $c \in \{0,5\} \Rightarrow 25=a+b+c \leq 23$ contradicție $\Rightarrow 25 \notin A$	2p
Dacă $\overline{abc}$ este $26-$fidel $\Rightarrow a+b+c=26 \Rightarrow \overline{abc} \in \{899,989,998\}$, dar nici unul dintre cele trei numere nu este divizibil cu 26 contradicție $\Rightarrow 26 \notin A$	1p
Dacă $\overline{abc}$ este $22-$fidel $\Rightarrow \overline{abc} \vdots 11 \Rightarrow a+c=b$ sau $a+c=b+11$ Dacă $a+c=b \Rightarrow 22=a+b+c=2b \Rightarrow b=11$ contradicție!	1p
Dacă $a+c=b+11 \Rightarrow 22=a+b+c=2b+11 \Rightarrow 2b=11$ contradicție $\Rightarrow 22 \notin A$	1p